ENS LYON P'

COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

(durée : 5 heures)

Les candidats sont priés de soigner la rigueur du raisonnement et la rédaction (écriture, présentation, orthographe). Ils sont autorisés à traiter les différentes parties dans l'ordre qu'ils préfèrent ; à cette fin, l'entête de chaque partie décrit les résultats qui y sont démontrés.

On note : $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ l'algèbre des applications bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$;
$\mathfrak{C} = \mathfrak{C}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ l'algèbre des applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$;
$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) = \mathfrak{B}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \cap \mathfrak{C}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

$\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ sont munis de la norme $\| f \|_\infty = \sup\{|f(t)| ; t \in \mathbb{R}\}$.

Pour $f \in \mathfrak{C} \setminus \mathfrak{A}$, on pose : $\| f \|_\infty = +\infty$; alors, pour tout réel r : $\| f \|_\infty > r$.

Pour tout $h \in \mathbb{R}$ et tout $f \in \mathfrak{C}$ on définit $\tau_h f \in \mathfrak{C}$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R} : (\tau_h f)(t) = f(t + h).$$

Pour tout $f \in \mathfrak{C}$ et tout $\varepsilon > 0$, on note :

$$\mathfrak{L}(f, \varepsilon) = \{L > 0 ; \forall a \in \mathbb{R}, \exists h \in]a, a + L[: \| \tau_h f - f \|_\infty < \varepsilon\} .$$

$\mathfrak{L}(f, \varepsilon)$ est une partie de $\mathbb{R}_+^*$ qui peut être vide ; si elle ne l'est pas, on note $m(f, \varepsilon)$ sa borne inférieure.

On dira que $f \in \mathfrak{C}$ est *presque périodique* si $\mathfrak{L}(f, \varepsilon)$ n'est vide pour aucun $\varepsilon > 0$. On notera $\Pi = \Pi(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ l'ensemble des applications continues presque périodiques.

Partie I

Dans cette partie, on démontre que $\Pi(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est une sous-algèbre fermée de $\mathfrak{A}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ contenant l'ensemble des fonctions continues périodiques, et que tout élément de $\Pi(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est uniformément continu sur $\mathbb{R}$.

1°. Montrer que toute fonction continue périodique est presque périodique.

2°. Soient $f \in \Pi(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et $a > 0$.

a) Vérifier que si $L \in \mathfrak{L}(f, \varepsilon)$, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in [0, L] : |f(y) - f(x)| < \varepsilon .$$ (on pourra choisir $a = -x$)

b) En déduire que f est bornée sur $\mathbb{R}$.

3°. Montrer que si $f \in \Pi(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et $u \in \mathbb{R}$ alors $\tau_u f \in \Pi(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Tournez la page S.V.P.

ENS LYON . P'

4°. a) Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\Pi(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ convergeant uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f, et soit $\varepsilon > 0$ fixé. Montrer que si $n \in \mathbb{N}$ est assez grand et $L \in \mathfrak{L}(f_n, \varepsilon)$, alors $L \in \mathfrak{L}(f, 3\varepsilon)$.

b) En déduire que f appartient à $\Pi(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

5°. Montrer que toute fonction continue presque périodique est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

6°. Une fonction $f \in \mathfrak{A}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est dite *normale* si pour toute suite réelle $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite $(\tau_{h_n} f)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergeant uniformément sur $\mathbb{R}$. *On admet qu'il y a identité entre les fonctions continues presque périodiques et les fonctions normales.*

a) Montrer que $\Pi(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{A}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

b) Montrer que le carré d'une fonction continue presque périodique est presque périodique.

c) En déduire que le produit de deux fonctions continues presque périodiques est presque périodique.

7°. a) Montrer que la fonction f_1 définie par $f_1(x) = e^{2i\pi x} + e^{2i\pi\sqrt{2}x}$ est presque périodique mais n'est pas périodique. (On pourra résoudre l'équation $f_1(x) = 2$.)

b) Même question pour la fonction f_2 définie par $f_2(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} e^{\frac{2i\pi x}{n}}$.

Partie II

Dans cette partie, on définit (2°) une forme linéaire continue M sur $\Pi(\mathbb{R}, \mathbb{C})$; on munit ensuite (4°.b) $\Pi(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ d'une structure d'espace préhilbertien complexe à l'aide de M.

1°. Soient $f \in \Pi(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et $\varepsilon > 0$.

a) Soient $L \in \mathfrak{L}(f, \varepsilon)$, $a \in \mathbb{R}$ et $h \in]a, a+L[$ tel que $\| \tau_h f - f \|_\infty < \varepsilon$.
(L'existence d'un tel h provient de la définition de $\mathfrak{L}(f, \varepsilon)$.) Montrer que :

$$\forall T > 0 : \left| \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt - \frac{1}{T}\int_h^{h+T} f(t)dt \right| \leq \varepsilon .$$

b) En déduire que :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall T > 0 : \left| \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt - \frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(t)dt \right| \leq \varepsilon + \frac{2m(f,\varepsilon).\|f\|_\infty}{T}$$

où $m(f, \varepsilon)$ est la borne inférieure de $\mathfrak{L}(f, \varepsilon)$, comme défini dans le préambule.

c) En observant que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall T > 0 : \int_0^{nT} f(t)dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{kT}^{(k+1)T} f(t)dt ,$$

montrer que :

$$\forall T > 0, \forall n \in \mathbb{N}^* : \left| \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt - \frac{1}{nT}\int_0^{nT} f(t)dt \right| \leq \varepsilon + \frac{2m(f,\varepsilon).\|f\|_\infty}{T} .$$

d) En déduire que pour tous $T_1, T_2 > 0$ tels que $\frac{T_1}{T_2}$ soit rationnel, on a :

$$\left| \frac{1}{T_1}\int_0^{T_1} f(t)dt - \frac{1}{T_2}\int_0^{T_2} f(t)dt \right| \leq 2\varepsilon + 2m(f,\varepsilon).\|f\|_\infty \left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} \right).$$

e) Etendre le résultat de la question **II.1°.d** au cas où $\frac{T_1}{T_2}$ est irrationnel.

2°. Montrer que pour tout $f \in \Pi(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, la quantité $\frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt$ admet une limite finie lorsque T tend vers $+\infty$, et que l'application M définie par :

$$\forall f \in \Pi(\mathbb{R}, \mathbb{C}) : M(f) = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt$$

est une forme linéaire continue sur $\Pi(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ muni de la norme $\|\ \|_\infty$.

3°. **a)** Vérifier que pour tout $f \in \Pi(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et tout $u \in \mathbb{R}$ on a $M(\tau_u f) = M(f)$.

b) Montrer que pour tout $f \in \Pi(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \forall a \in \mathbb{R}, \forall T > 0 : \left| \frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(t)dt - M(f) \right| \leq 3\varepsilon + 4m(f,\varepsilon).\frac{\|f\|_\infty}{T} .$$

4°. **a)** Soit f une fonction continue presque périodique à valeurs réelles positives telle que $f(0) > 0$. Soient $\varepsilon \in \left]0, \frac{f(0)}{4}\right[$ et $L \in \mathfrak{L}(f, \varepsilon)$. Etablir l'existence d'une suite $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et d'un réel $\alpha \in \left]0, \frac{L}{2}\right[$ tels que :

(i) $\forall n \in \mathbb{N} : h_n \in]2nL, (2n+1)L[$;

(ii) $\forall t \in [h_n - \alpha, h_n + \alpha] : f(t) \geq \frac{1}{2} f(0)$.

b) En déduire que M(f) est un réel strictement positif.

c) Montrer que si on pose : $\forall f_1, f_2 \in \Pi(\mathbb{R}, \mathbb{C}) : \langle f_1, f_2 \rangle = M(\bar{f}_1 f_2)$, on définit sur $\Pi(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ un produit scalaire qui munit $\Pi(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ d'une structure d'espace préhilbertien complexe ($\bar{f}$ est la fonction conjuguée de f)

Dans toute la suite du problème, on notera $\|f\|_2 = \sqrt{M(|f|^2)}$ *la norme sur* $\Pi(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ *associée à ce produit scalaire.*

Partie III

Dans cette partie, on définit (1°) une application linéaire continue Λ *de* $\Pi(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ *dans* $\mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$*, dont on admettra l'injectivité, puis on montre que les fonctions images sont nulles hors d'une partie finie ou dénombrable de* $\mathbb{R}$.

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ on définit $u_\lambda \in \Pi(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ par $u_\lambda(t) = e^{i\lambda t}$.

Pour tout $f \in \Pi(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$ on pose, avec les notations du **II.4°.c** :

$$\hat{f}(\lambda) = \langle u_\lambda, f \rangle = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-i\lambda t}dt .$$

Tournez la page S.V.P.

ENS LYON P'

1°. Montrer que la transformation $\Lambda : f \mapsto \hat{f}$ est une application linéaire continue de $\prod(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ muni de $\| \ \|_\infty$ dans $\mathfrak{B}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ muni de $\| \ \|_\infty$. *On admettra que cette application est injective.*

2°. a) Prouver que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{iu^2} du$ est convergente.

b) Soit $f(t) = e^{it^2}$. On suppose $f \in \prod(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Montrer que :

$$\hat{f}(\lambda) = \lim_{T \to +\infty} \frac{e^{-i\frac{\lambda^2}{4}}}{T} \int_{-(\lambda/2)}^{T-(\lambda/2)} e^{iu^2} du .$$

En déduire que f ne peut appartenir à $\prod(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Peut-on en donner une autre démonstration ?

3°. Montrer que $\{u_\lambda ; \lambda \in \mathbb{R}\}$ est une *famille orthonormale* de $\prod(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ pour le produit scalaire défini au **II.4°.c**, autrement dit :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} : \langle u_\lambda, u_\lambda \rangle = 1 \ ; \ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \lambda \neq \mu : \langle u_\lambda, u_\mu \rangle = 0 .$$

4°. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ périodique de période 2π.

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{Z} : \hat{f}(n) = c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \, e^{-int} \, dt$.

b) On suppose que la série $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)$ est absolument convergente.

Montrer que si $\lambda \notin \mathbb{Z}$ alors $\hat{f}(\lambda) = 0$.

5°. Calculer les images $\hat{f}_1$ et $\hat{f}_2$ des fonctions f_1 et f_2 définies au **I.7°**.

6°. a) Soient $\lambda_1, ..., \lambda_N$ des réels distincts et $f \in \prod(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Montrer que :

$$\left(\| f - \sum_{n=1}^{N} \langle u_{\lambda_n}, f \rangle u_{\lambda_n} \|_2 \right)^2 = (\| f \|_2)^2 - \sum_{n=1}^{N} | \langle u_{\lambda_n}, f \rangle |^2 .$$

b) Pour tout $f \in \prod(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ on note : $D_0(f) = \{\lambda \in \mathbb{R} \ ; \ |\hat{f}(\lambda)| > 1\}$, et :

$$\forall j \in \mathbb{N}^* : D_j(f) = \left\{\lambda \in \mathbb{R} \ ; \ \frac{1}{j+1} < |\hat{f}(\lambda)| \leq \frac{1}{j}\right\} .$$

Montrer que $D_j(f)$ est de cardinal fini pour tout $j \in \mathbb{N}$.

c) On pose, pour tout $f \in \prod(\mathbb{R}, \mathbb{C})$: $D(f) = \{\lambda \in \mathbb{R} \ ; \ |\hat{f}(\lambda)| \neq 0\}$. Montrer que, ou bien D(f) est fini : $D(f) = \{\lambda_1, ..., \lambda_N\}$, ou bien D(f) est *infini dénombrable*, autrement dit, il existe une suite $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de réels distincts telle que $D(f) = \{\lambda_n ; n \in \mathbb{N}^*\}$.

d) Montrer que l'ensemble des points de discontinuité de $\hat{f}$ est identique à D(f).

Les nombres $\hat{f}(\lambda_n)$ pour $\lambda_n \in D(f)$ s'appellent coefficients de Fourier généralisés de f.